Anhang zu „Die Corona-Zeitkapsel – Teil 1: Lockdown revisited“

Pierre Obertin*

September 2023

*Expressis Verbis Blog

1 Bestimmung der Gleichung „No Lockdown scenario“

Wir nennen diese Funktion E. Da sie ein exponentielles Wachstum beschreibt, ist sie von der Form:

$$E(t) = e^{k\cdot(t-t_0)}$$

wobei k die Wachstumskonstante angibt (je größer k, umso schneller wächst E), und t_0 den Zeitpunkt angibt für den gilt: $E(t_0) = e^{k\cdot(t_0-t_0)} = e^0 = 1$. Ein größeres t_0 schiebt den Graph von E nach rechts, eine kleineres entsprechend nach links. Am 29. Februar wurde der erste PCR-Test mit positivem Resultat durchgeführt, für diesen Tag setzen wir $t = 0$.

Mit diesen 2 Parametern können wir also E an die Kurve vom „No Lockdown scenario“anpassen.

k können wir unmittelbar ausrechnen: aus der angebenen Verdopplungszeit $\tau_2^{PI} = 2,28$ folgt für die Wachstumskonstante nach der bekannten Formel[1]:

$$\tau_2^{PI} = \frac{\ln 2}{k} \Leftrightarrow k = \frac{\ln 2}{\tau_2^{PI}} = \frac{\ln 2}{2,28} \approx 0,304$$

Beim Parameter t_0 gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass er ganzzahlig ist. Wir testen dann einige Werte durch bis wir eine Übereinstimmung mit der Abbildung aus dem Dokument von Research Luxembourg erhalten.

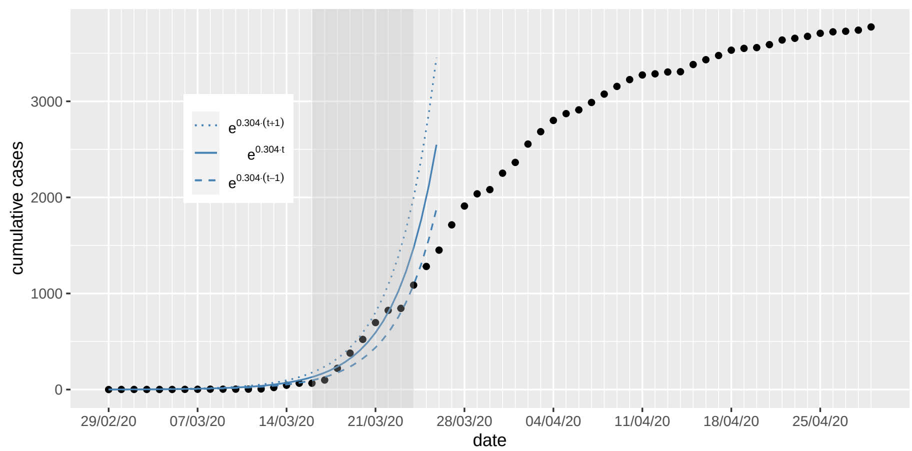

Abbildung 1: Bestimmung von t_0

Offenbar ergibt der Wert $t_0 = 0$ ein befriedigendes Ergebnis (durchgezogene Kurve in Abbildung 1). Unsere Gleichung für die Funktion E lautet somit:

$$E(t) = e^{0,304\cdot t}$$

2 Bestimmung von $\Delta E(t)$

Die Neuinfektionen für den Tag t leitet man von den kumulierten Fallzahlen durch Bildung der Differenz zwischen diesem und dem vorherigen Tag ab. Mathematisch ausgedrückt: es sei $\Delta E(t)$ die Anzahl der positiven PCR-Tests am Tage t, dann gilt:

$$\Delta E(t) = E(t) - E(t-1) = e^{k \cdot t} - e^{k \cdot (t-1)} = e^{k \cdot t} - e^{k \cdot t} \cdot e^{-k} = \left(1 - e^{-k}\right) \cdot e^{k \cdot t}$$

Für $k = 0,304$ erhalten wir somit:

$$\Delta E(t) = \left(1 - e^{-0,304}\right) \cdot e^{0,304 \cdot t} \approx 0,262 \cdot e^{0,304 \cdot t}$$

ΔE ist mit den realen täglichen Fallzahlen in Abbildung 2 dargestellt.

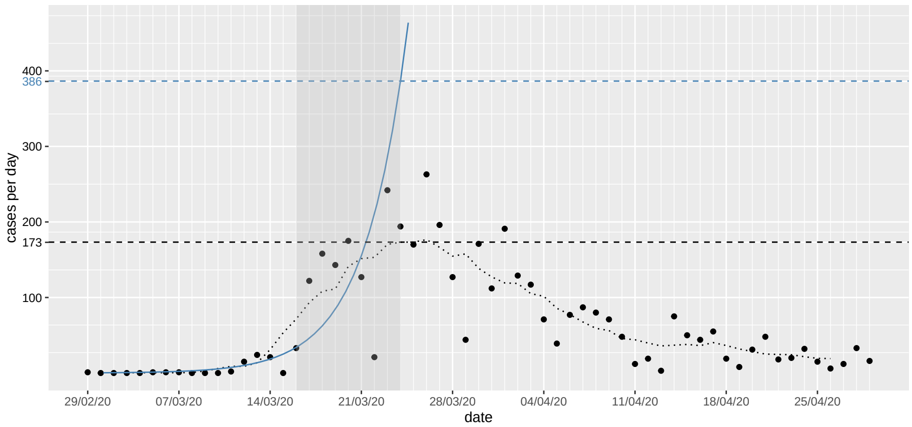

Abbildung 2: ΔE (blau) und tägliche Fallzahlen

ΔE ergibt für den 24. März ($t = 24$) einen Wert von 386 und liegt damit deutlich über dem gleitenden Mittelwert von 173 für diesen Tag.

3 Wachstumsrate

Wir bezeichnen im Folgenden die kumulierte Anzahl der durch einen positiven PCR-Test festgestellten Infizierten mit $I(t)$ wobei wie bisher festgelegt $t = 0$ für den 29. Februar 2020 gilt. Analog zum vorherigen Abschnitt ist dabei $\Delta I(t)$ wieder die Anzahl der Neuinfektionen am Tage t. I ist eine sogenannte *diskrete Funktion*, welche nur für ganzzahlige t einen Wert liefert. Die (tägliche) Wachtstumrate $r(t)$ einer solchen Funktion ist gegeben durch:

$$r(t) = \frac{\Delta I(t)}{I(t-1)} = \frac{I(t) - I(t-1)}{I(t-1)} = \frac{I(t)}{I(t-1)} - 1$$

Im Klartext: wir bilden den Quotienten aus den Neuinfizierten am Tage t und der Gesamtzahl der festgestellten Infizierten am Vortag $t - 1$.

Ein interessantes Resultat erhalten wir, wenn wir die Wachstumsrate $r_E(t)$ für die weiter oben betrachtete exponentielle Funktion $E(t)$ berechnen:

$$r_E(t) = \frac{E(t)}{E(t-1)} - 1 = \frac{e^{k \cdot t}}{e^{k \cdot (t-1)}} - 1 = \frac{e^{k \cdot t}}{e^{-k} \cdot e^{k \cdot t}} - 1 = e^k - 1$$

Mit anderen Worten: die Wachstumsrate einer exponentiellen Funktion ist konstant! Insbesondere hat damit die vorher betrachtete „No Lockdown scenario“-Funktion E eine zeitunabhängige Wachstumsrate r_E von:

$$r_E = e^k - 1 = e^{0{,}304} - 1 \approx 0{,}355$$

Zum Vergleich werden die Wachstumstraten der zuvor bestimmten Funktion $E(t)$ sowie der aus den realen Daten berechneten in der Grafik 3 dargestellt. Da $r(t)$ einen weiten Wertebereich umspannt, wurde die vertikale Achse logarithmisch skaliert.

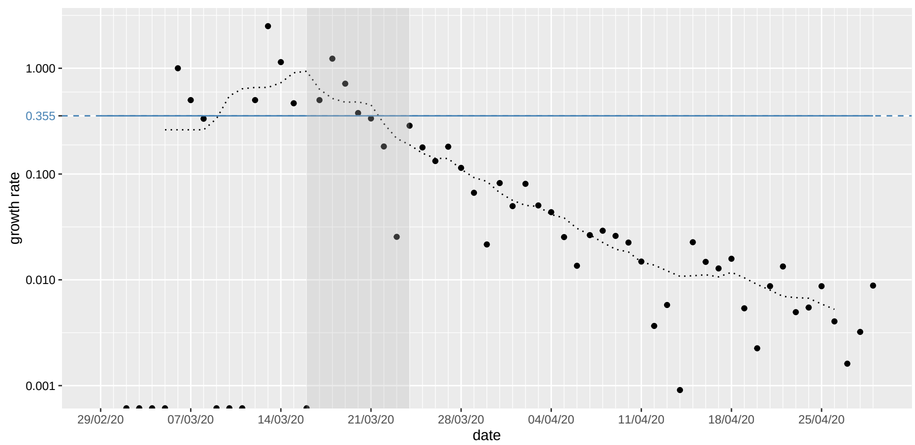

Abbildung 3: Wachstumsraten r_E (blau) und $r(t)$ aus den realen Daten

4 Reproduktionszahl

Die (effektive) Reproduktionszahl R_{eff} ist vom Konzept her eigentlich simpel: man betrachtet den Quotienten der Neuinfektionen (tägliche Fallzahlen) ΔI an 2 Zeitpunkten welche sich um das serielle Intervall s unterscheiden[2].

$$R_{\text{eff}}(t) = \frac{\Delta I(t)}{\Delta I(t-s)}$$

Wir benutzen den gleichen Wert wie Research Luxembourg bei der Berechnung der Reproduktionszahl: 4 Tage.

Berechnen wir analog zur Wachstumsrate die Reproduktionszahl für die Funktion E so erhalten wir:

$$R_{\text{eff, E}}(t) = \frac{\Delta E(t)}{\Delta E(t-s)} = \frac{\left(1-e^{-k}\right) \cdot e^{k \cdot t}}{\left(1-e^{-k}\right) \cdot e^{k \cdot (t-s)}} = \frac{e^{k \cdot t}}{e^{k \cdot t} \cdot e^{-k \cdot s}} = e^{k \cdot s}$$

Mit $k = 0,304$ und $s = 4$ ergibt sich für die Reproduktionszahl des „'No Lockdown' scenario“:

$$R_{\text{eff, E}} = e^{k \cdot s} = e^{0,304 \cdot 4} \approx 3,37$$

Dies ist also wie bei der Wachstumsrate r_E wiederum eine Konstante, wenn sie sich natürlich auch von dieser unterscheidet.

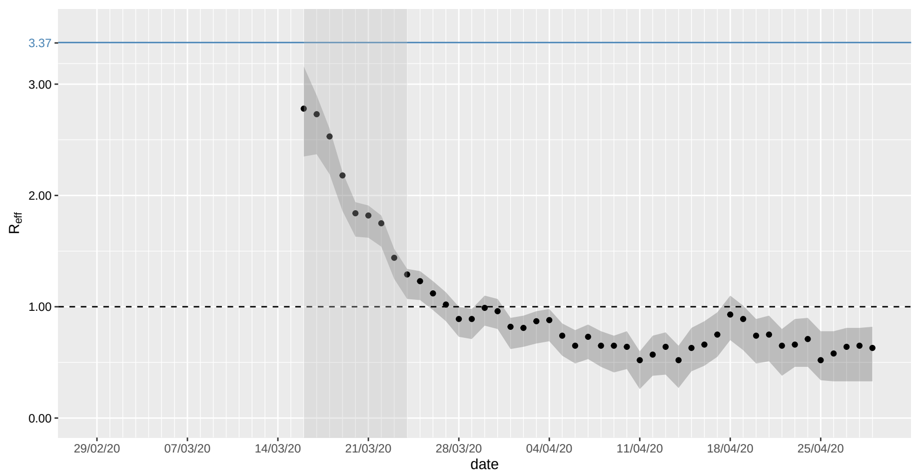

Abbildung 4: Vergleich Reproduktionszahlen

5 Die Gompertz-Funktion

Benjamin Gompertz (*1779 - †1865) entwickelte 1825 ein Wachstumsmodell für Populationen indem er die Sterblichkeitsrate eines Individuums mit zunehmenden Alter als exponentiell ansteigend postulierte. Die hieraus abgeleitete Funktion $G(t)$ [3] ist eine sogenante Sigmoidfunktion.

$$G(t) = A \cdot \exp(-\exp(-k \cdot (t - t_{\mathrm{IP}}))) = A \cdot e^{-e^{-k\cdot(t-t_{\mathrm{IP}})}}$$

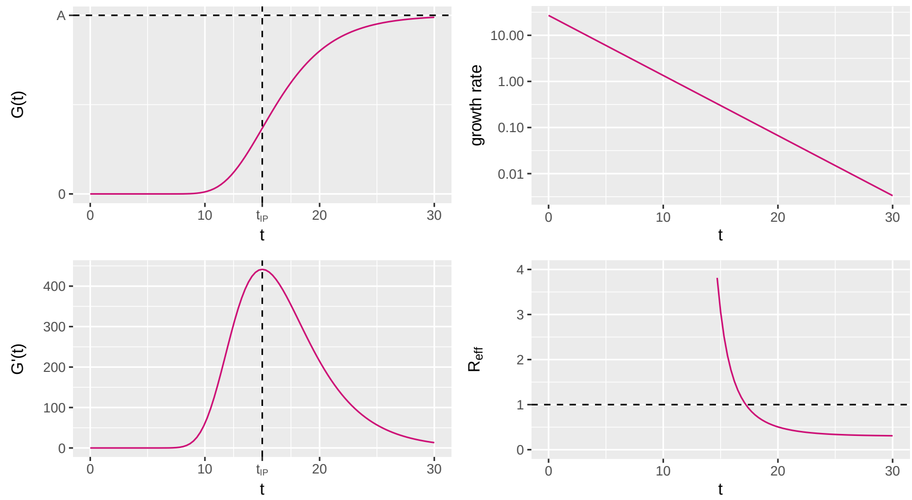

Abbildung 5: Gompertz-Funktion, Ableitung, Wachstumsrate und R_{eff}

Dabei ist A die Asymptote, also der Wert dem sich das Wachstum für große t annähert, k bestimmt die Steigung der Funktion und t_{IP} ist der Zeitpunkt wenn der Wendepunkt (franz.: *point d'inflexion*), in der Mitte des linearen Anteils liegend, erreicht wird.

Wir betrachten hier zunächst den Fall *kontinuierlichen* Wachstums. Die in Abbildung 5 dargestellten 4 Graphen sind:

- die Gompertz-Funktion $G(t)$
- ihre Ableitung $G'(t)$, diese entspricht beim diskreten Wachstum dem (täglichen) Zuwachs ΔG :

$$\begin{aligned} G'(t) &= A \cdot k \cdot \exp(-k \cdot (t - t_{\mathrm{IP}})) \exp(\exp(-k \cdot (t - t_{\mathrm{IP}}))) \\ &= k \cdot \exp(-k \cdot (t - t_{\mathrm{IP}})) \cdot G(t) \end{aligned}$$

  Sie erreicht ihr Maximum zum Zeitpunkt t_{IP}.

- die Wachstumsrate $r_G(t)$ berechnet für kontinuierliches Wachstum nach der Formel:

$$r_G(t) = \frac{G'(t)}{G(t)} = k \cdot e^{-k(t-t_{\mathrm{IP}})}$$

  Bildet man hiervon den Logarithmus, so ergibt sich unmittelbar das linear fallende Verhalten im entsprechenden Graphen bei logaritmischer y-Achse:

$$\ln r_G(t) = \ln(k \cdot e^{-k(t-t_{\mathrm{IP}})}) = \ln k + \ln e^{-k(t-t_{\mathrm{IP}})} = -kt + \ln k - t_{\mathrm{IP}}$$

- die entsprechende Reproduktionszahl $R_{\text{eff, G}}$ für ein serielles Intervall s

$$R_{\text{eff,G}}(t) = \frac{G'(t)}{G'(t-s)}$$

Die Parameter der Funktion G bestimmen wir mit der Methode der kleinsten Residuenquadrate. Als Verfahren kommt die Funktion *optim* aus dem R-Packet *stats* zum Einsatz [4]. Wir erhalten für die Parameter:

$$A = 3733,84 \qquad k = 0,13 \qquad t_{\mathrm{IP}} = 25,52$$

In der Abbildung 6 sind von oben nach unten dargestellt:

- die ensprechende Gompertz-Funktion $\hat{G}$ in pink:

  $$\hat{G}(t) = 3733,84 \cdot \exp(-\exp(-0,13 \cdot (t-25,52))) = 3733,84 \cdot e^{-e^{-0,13\cdot(t-25,52)}}$$

- die täglichen Fallzahlen $\Delta\hat{G}$ hergeleitet nach der oben beschriebenen Methode:

  $$\Delta\hat{G}(t) = \hat{G}(t) - \hat{G}(t-1)$$

- die Wachstumsrate $r_{\hat{G}}(t)$

  $$r_{\hat{G}}(t) = \frac{\Delta\hat{G}(t)}{\hat{G}(t)}$$

- die Reproduktionsrate $R_{\text{eff},\hat{G}}(t)$

  $$R_{\text{eff},\hat{G}}(t) = \frac{\Delta\hat{G}(t)}{\Delta\hat{G}(t-s)}$$

  Zum Vergleich werden die von Research Luxembourg berechneten Reproduktionsraten von 2020 (grün) und 2023 (orange) angezeigt.

In allen 4 Graphen ist das „'No Lockdown' scenario“wie gehabt in blau visualisiert.

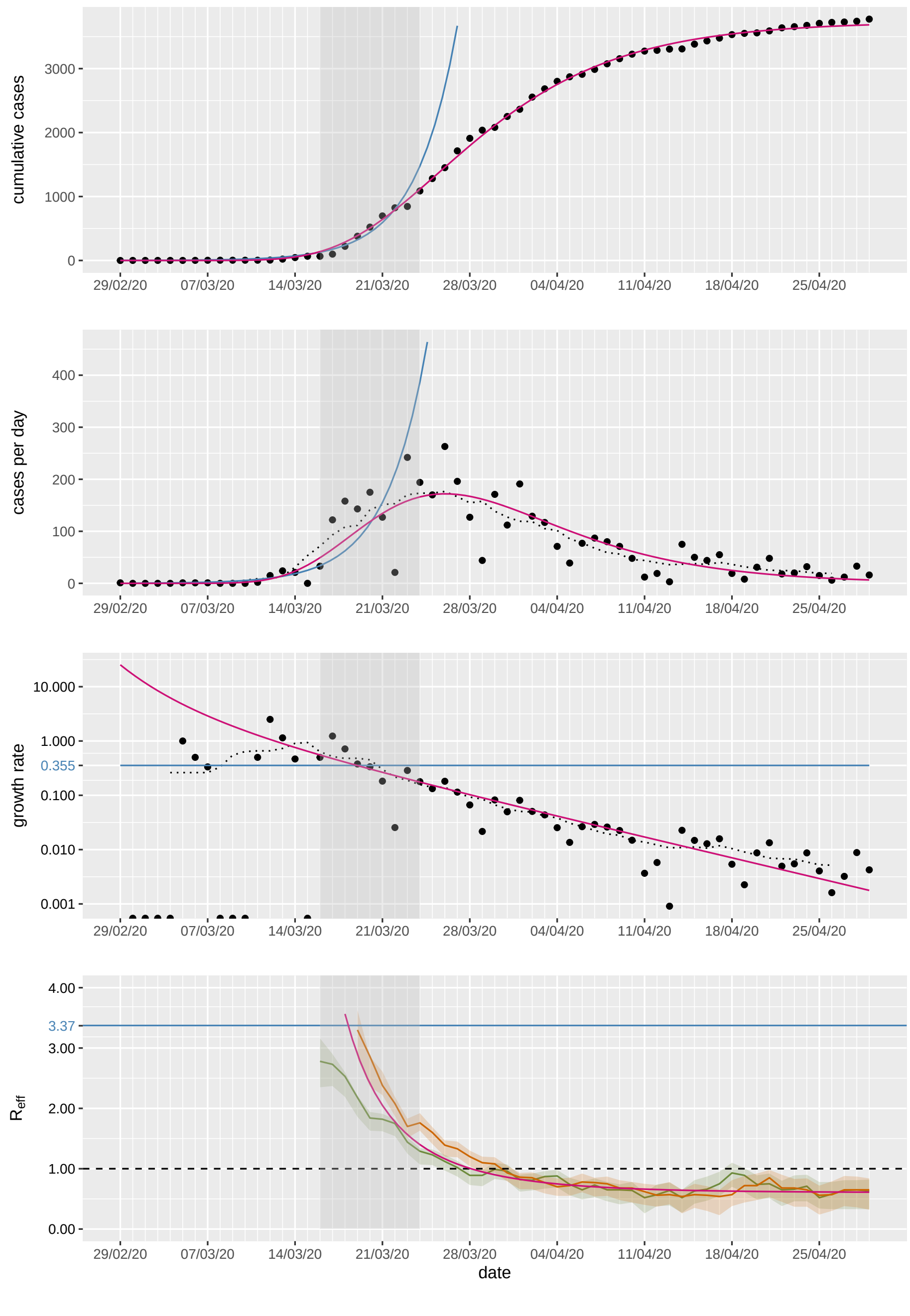

Abbildung 6: „No Lockdown scenario“(blau) und Gompertz-Funktion (rosa) im Vergleich

Quellen

[1] Wikipedia. *Exponentielles Wachstum — Wikipedia, die freie Enzyklopädie.* 2022. URL: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Exponentielles_Wachstum%5C&oldid=227441950`.

[2] Wikipedia. *Serielles Intervall — Wikipedia, die freie Enzyklopädie.* 2022. URL: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Serielles_Intervall&oldid=229334733`.

[3] Wikipedia. *Gompertz-Funktion — Wikipedia, die freie Enzyklopädie.* 2022. URL: `https://de.wikipedia.org/w/index.php?title=Gompertz-Funktion&oldid=227142043` (besucht am 17. 12. 2022).

[4] RDocumentation. *optim: General-purpose Optimization.* URL: `https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/optim` (besucht am 18. 12. 2022).